



TITLE:

# 「Eulerの力学」(オイラー方程式 250年:連続体力学におけるオイラ ーの遺産)

AUTHOR(S):

山本, 義隆

---

CITATION:

山本, 義隆. 「Eulerの力学」(オイラー方程式250年:連続体力学におけ  
るオイラーの遺産). 数理解析研究所講究録 2008, 1608: 1-13

ISSUE DATE:

2008-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/139998>

RIGHT:

## Department of Physics, Sundai Preparatory School

\*1 「Newton の言う駆動力は現在言う力積 (impulse) であり、力の強さだけでなく、力が働く持続時間も考慮に入れられている。」  
Maxwell, *Matter and Motion* (1877) p.32 より。

(第2篇・命題1)」というものである。

『プリンキピア』の数学は解析学ではなく、極限の幾何学。そして Newton が『プリンキピア』でやったことは、Kepler の法則から逆2乗の万有引力を導くこと（順問題）で、逆2乗の引力を受けている惑星の運動（楕円軌道）を導くこと（逆問題）ではない。

また『プリンキピア』における多体問題や流体の問題の扱いは「法則Ⅱ」とは別の仮説にもとづいている。

## 2 『プリンキピア』以降の半世紀

Leibniz: 『プリンキピア』の内容の一部（第1篇・命題6）を微分方程式の形に書き直す。

Varignon: 微分方程式を用いて「順問題」を解く。つまり Kepler の法則から引力の関数形を導く。ただし Leibniz も Varignon も、空間に固定した座標系を使っていない。曲線上の各点で向心力を与えるもの。

Hermann: 微分方程式としての運動方程式を空間に固定した2次元デカルト座標成分で表し、面積定理を仮定して、楕円軌道を導く。「逆問題」の初めての部分的な解。レンツ・ベクトルを最初に導入。

Hermann の運動方程式は、 $m\ddot{\vec{r}} = -m\mu\vec{r}/r^3$  を成分にわけた

$$d^2x = -\frac{\mu x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dt^2, \quad d^2y = -\frac{\mu y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dt^2,$$

ではなく、面積定理を用いて  $dt$  を  $(xy - yx)dt/2h = (xdy - ydx)/2h$  で置き換えた

$$d^2x = -\frac{\mu x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{(xdy - ydx)^2}{(2h)^2}, \quad d^2y = -\frac{\mu y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{(xdy - ydx)^2}{(2h)^2}.$$

D.Bernoulli: Hermann の仕事を2次元極座標に書き直す。やはり面積定理を仮定。

このように、18世紀前半まで、Newton の「法則Ⅱ」が現在のような形で3次元デカルト座標の微分方程式に表される「運動方程式」として受取られていたわけではなかったし、「法則Ⅱ」が力学全般の基礎と認められてもいたわけでもなかった。そもそもが、力学全般を単一の基礎から体系的に築き上げるという意識も希薄であった。つまるところ、『プリンキピア』以降数十年間の力学研究は、とりわけ剛体や流体の問題では、個々の問題ごとにガリレオの公式や、運動量の保存や、エネルギー保存則に相当するものを「原理」として措き、数学者がそれぞれの流儀で問題に立ち向かっていた。<sup>\*2</sup>

## 3 Euler のプログラム

『力学：解析的に示された運動の科学 (Mechanica: sive motus scientia analytice exposita)』1734(1736), LEOO II-1,2 (Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. II, Vol.1,2 を表す)；以下『力学』。

### 1.) 力学の解析化

Newton の『プリンキピア』の欠陥をその幾何学的記述に捉え、その克服の方向を解析化に求める。

「私が Newton の『プリンキピア』と Hermann の『ホロノミア』を学んだとき、たとえ多くの問題の解法を十分に理解したと思っても、しかしそれらとわずかにしか異ならない問題の解を自分で得ることはできなかった。……たとえ『プリンキピア』の読者がそこで提示されている事柄の正しさを確信したとしても、彼

<sup>\*2</sup> 「18世紀中期まで Newton の第2法則が数個の自由度を持つ力学系の動力学的記述にとっての基礎として用いられるとは、誰も思っていなかった。」 Cannon and Dostrovsky, *The Evolution of Dynamics*, p.1.

「18世紀には、力学はまだ厳密に定義された言葉で表される単一の原理の組に還元されていなかった。力学の問題を扱うためには、数学者ごとに異なる方法が用いられ、各人が自分なりのやり方で問題を解いていた。」 Hankins, *Jean d'Alembert*, p.64.

はその事柄について十分に明晰な知識を得ることはできないであろう。それゆえ、もしも同じ問題がわずかに変えられたならば、自分で解析学に頼り、同じ命題を解析的な方法で展開してみないかぎり、それらを自力で解くことはできないであろう。」(『力学』序文)

## 2.) 力学の体系化・統一化

Euler は、力学のすべての問題を単一の原理から統一的に捉えることを目標に据え、その目的にむけて、Newton が曖昧に「物体 (corpus)」と記していたものを「質点」および「質点の集合としての各種の物体」すなわち「流体」「弾性体」「剛体」に概念的に区別し、その区別にもとづいて、質点力学に始まる体系的な力学形成のプログラムを提唱。

「これらの運動の法則は、本来は点と見なしうる無限に小さな物体にたいするものである。実際、そのいくつかの部分の部分がさまざまな運動を与えられた有限の大きさの物体では、その部分はこの運動の法則に従おうとするが、しかしそれはその物体の状態によりつねに可能なわけではない。したがって、その物体はいくつもの部分がしようとする運動の合成としての運動を行なう。そして原理が不十分であるために、この運動を決定することにいまだ成功せず、その扱いは今後に残されている。このように物体が多様であるために、私たちの研究をはじめに区分する必要がある。実際、まず第一に私たちは、無限に小さくて点と見なすことのできる物体を調べる。第二に、有限の大きさを持ちその形を変えない剛体に着目する。第三に、柔軟な物体〔可塑性の物体〕を論ずる。第四に、伸縮可能なもの〔弾性体〕に取り掛かる。第五に、互いに作用を及ぼしあっているばらばらの複数個の物体を、第六に、そして最後に、流体の運動を調べることになるであろう。」(『力学』§ 98)

## 3.) 微分方程式としての運動方程式

軌道の各点で接線力と向心力を与える公式 ( $mdu/dt = F_t, mu^2/\rho = F_n$  に相当する式) を、 $v = u^2/2, s =$  経路長、 $dx = ds$  の  $\vec{F}$  に垂直な成分、そして、 $F_t = mT, F_n = mP$  として、次式で与える：

$$dv = Tds, \quad 2vds = P\rho dx. \quad (1)$$

# 4 3次元デカルト座標での運動方程式の導入

『天体の運動一般の研究 (Recherches sur le mouvement des corps célestes en général)』1747(1749), LEOO, II-15; 以下『研究』。天体力学の一般的問題が微分方程式として表された初めての文書。そしてこの論文を境に、それまで Newton もふくめて幾何学で論じられていた天文学が解析学で論じられるようになった。

質点にたいする運動方程式を3次元デカルト座標での微分方程式として表現

$$\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{X}{M}, \quad \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M}, \quad \frac{2ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M}. \quad (2)$$

$X/M, Y/M, Z/M$  は「加速力 (force accélératrices)」の成分、2は Euler に特有の因子 (§ 18)。

『研究』で Euler は、力や加速度を3次元ユークリッド空間のベクトルとして捉え、2階の微分方程式としての運動方程式——今日言うところの「Newton の方程式」——を初めて3次元直交成分で表した。<sup>\*3</sup>

つまり、Euler の『力学』もふくめ、それまで用いられてきた接線力と向心力の式は、空間に固定した座標系に依拠するのではなく、軌道の経路長  $s$  をパラメータとした軌道の各点での運動方程式であった。そのかぎり、部分がそれぞれ異なる運動をする流体や剛体の運動には直接使用できない。これにたいして『研究』で Euler は、運動方程式を、物体を構成する要素としての質点にたいするものとして、したがってすべての物体

<sup>\*3</sup> 「天体力学にたいする“Newton の方程式”が最初に公表された年は『プリンキピア』の出版された1687年ではなくて[Euler の『研究』の公表された]1749年である。」Truesdell, *Essay in the History of Mechanics*, p.90.

の運動の基礎を与えるものとして提唱し、それをすべての運動に適用しうるように空間に固定した直交座標に運動を分解して表したのである。これによって、それまで用いられてきた接線力と向心力の公式は「ほとんど見捨てられることになった」(Lagrange, *Mécanique Analytique*, Pt.2, § 1-3)。

なお、本論文で Euler は、平面極座標を用いてケプラー問題のはじめての完全な解析解を与えている。このことは、物体の運動から物体に働く力を求める「順問題」から、与えられた力のもとでの物体の運動を調べる「逆問題」への力学の問題設定の転換が完了したことを意味している。

## 5 Euler による汎通的な力学原理の提唱

『力学の新しい原理の発見 (*Découverte d'un nouveau principe de Mécanique*)』1750(1752), *LEOO*, II-5; 以下『発見』。

### 1.) 『力学』の問題意識の継承：

「力学の諸原理が第一原理、言い換えればその上に運動の全理論が樹立されるべき公理 (des axiomes) から導かれることが絶対的に必要である。その公理は進行運動以外の運動を許容しない〔つまり回転や内部運動のない〕無限に小さい物体 (des corps infiniment petit) でありながら、他のすべての運動の原理がそこから導き出され、かつ固体であれ流体であれその運動を決定するのに役立つものである。他のすべての原理は、この公理を、物体が要素から構成されるに応じて適用したものにはならない。」(『発見』 § 18)

「無限に小さい物体の運動にかかわっているので力学の公理の一つに数えられてしかるべきように思われる原理は、一般にはいくつも見い出される。しかし私は、それらすべての原理をすべての力学および物体の各種の運動を扱う科学全体の唯一の基礎と見なすことのできる単一の原理に還元しうることに着目する。そして我々が、力学と流体力学においてすでに認められ、固体と流体の運動の決定に現実に用いられている諸原理のみならず、まだ知られてはいないけれども固体や流体中に見い出されるであろう多くの問題を発展させるのに必要とされる他のすべての原理を基礎づけるべきは、唯一この原理にである。」(『発見』 § 19)

### 2.) 3次元直交座標で表した質点の運動方程式を、力学全体を包摂する第一原理として提唱：

「物体が無限に小さいとして、ないしはその全質量が唯一の点に糾合されたとして、その質量を  $M$  とおく。そしてその物体がなにがしかの運動を受取り、なんらかの力の作用を受けるとしよう。その運動を決定するためには、ある固定された面からのその物体の距離を知るだけでよい。ここではある瞬間における物体のその平面からの距離を  $x$  とする。その物体に働くすべての力をその平面に平行な方向と垂直な方向に分解し、この分解においてその平面に垂直で物体をその平面から遠ざけようとする、ないしその平面に近づけようとする力を  $P$  とする。時間の要素  $dt$  を一定とし、 $dt$  の後に平面からの距離が  $x + dx$  になったとすると、力  $P$  が物体を平面から遠ざけるか近づけるかにおうじて  $2Mddx = \pm Pdt^2$  となる。」(『発見』 § 20)

「これらの力は物体を三つの〔たがいに直交する〕平面から遠ざける傾向にあるとする。というのも近づける傾向にあるときには力を負にとればよいからである。これを認めるならば、物体の運動は

$$2Mddx = Pdt^2, \quad 2Mddy = Qdt^2, \quad 2Mddz = Rdt^2. \quad (3)$$

の三つの公式に捉えられるであろう。」(『発見』 § 22) (もちろんこれは (2) 式とおなじもの。)

「これが、力学のすべての原理を包摂する唯一の公式である (C'est cette formule seule, qui renferme tous les principes de la mécanique).」(『発見』 § 20)\*<sup>4</sup>

\*<sup>4</sup> 「この論文はいわゆる Newton の方程式  $\vec{F} = m\vec{a}$  を、その当時使用されていた他のいくつかの原理の出発点である“力学の新しい原理”として、直交デカルト座標で初めて提唱したものである。」Truesdell, *An Idiot's Fugative Essays on Science*, p.317.

「私が確立するにいたったこの原理は、どのような性質のものであれすべての物体の運動についての知識に導くことのできる原理をそのうちに含んでいる。」(『発見』 § 23)

実際、Euler は、それまで問題ごとに個別的にあつかわれてきた剛体や流体の諸問題のすべてにたいする基礎をあたえるものとして、この方程式を「力学の新しい原理 (un nouveau principe de mécanique)」として提唱し、そこから剛体の回転の方程式や流体力学の方程式を導き出すことに成功。<sup>\*5</sup>

## 6 Euler の運動方程式と Newton の「法則」

### 1.) Newton の「法則Ⅰ」「法則Ⅱ」との関係

「もしも物体が何の力も受けていないならば、 $P = 0, Q = 0, R = 0$  であるから、この三つの公式〔運動方程式 (3) の 3 成分〕は、 $dt$  が一定ゆえ、積分することにより、次式に帰着する：

$$Mdx = A dt, \quad Mdy = B dt, \quad Mdz = C dt. \quad (4)$$

このことからただちに、物体は一直線上を一様に運動することが知られる。そしてそれゆえこの公式〔運動方程式 (3)〕は、それ自体のうちに、外から何らかの力を受けていないかぎり、静止物体は静止し続け、運動物体は同じ方向に一様に運動し続けるという運動の第一法則〔慣性の法則〕を含んでいる。」(『発見』 § 23)

「物体  $M$  に作用する力が消失したとするならば、方程式 [(2)] は

$$ddx = 0, \quad ddy = 0, \quad ddz = 0$$

となり、 $dt$  は一定だから、一度積分することにより、

$$dx/dt = a, \quad dy/dt = b, \quad dz/dt = 0$$

が得られ、もう一度積分すれば

$$x = at + \alpha, \quad y = bt + \beta, \quad z = ct + \gamma. \quad (5)$$

これより、その物体の速さは一定であり、かつその物体が運動する経路が直線であることがわかる。これは力学の第一法則の要求していることである。」(『研究』 § 20)

Newton の「法則Ⅰ (慣性の法則)」は運動方程式に特別な場合として含まれているというこの指摘は、Euler の「新しい原理」としての運動方程式が、Newton の「法則Ⅱ」と「法則Ⅰ」をともに包摂するものであり、「法則Ⅱ」より広いことを意味する。

### 2.) 「慣性」概念の洗練

そのことは同時に、「慣性の力による運動の持続」と「駆動力による加速」を併置した Newton の理解を克服するもので、これにより Euler は、それまでの「慣性の力 (vis inertiae)」という混乱を最終的に整理する。

『自然哲学序説 (Anleitung zur Naturlehre)』1750 頃 (1862), LEOO, III-1; 以下『序説』。

「慣性 (Trägheit) という言葉には力 (Kraft) という言葉が通常結合され、物体には慣性の力が付与されてきたが、そのことで大きな混乱がもたらされてきた。というのも力とは、本来、物体の状態変化をもたらすもののことだからである。それゆえ、まさにその状態を維持・保存せしめるものを力と見なすことはできない。」(§ 31)

<sup>\*5</sup> 「力学原理の観点からすると、この論文は Newton の『プリンキピア』と同レベルの重要な転換点である。力学の問題のそれまでのほとんどすべての扱いが時代遅れになり、以前には込み入った問題と思われていたものが、一般的な運動方程式のうちに容易に定式化されるようになったのである。」Truesdell, *Idiot's Fugitive Essays on Science*, p.321.

『ドイツ皇女への手紙 (Lettres à une Princesse d'Allemagne)』1760-2(1768)LEOO III-11,12.

「すべての物体はそれらが物質から構成されているかぎり、何らかの外的原因によってその置かれている状態から引き出されないかぎり、同一の状態に留まるという性質を有している。そしてこのことは物体の本性 (la nature des corps) に由来する性質であり、それによって諸物体は静止状態であれ運動状態であれ、同一の状態を維持しようとする。すべての物体に付与されているこの性質は、慣性 (inertie) と呼ばれ、不可透入性と同様に物体の構成に必然的に含まれている。物体が慣性なしに存在することは不可能である。」(Lettre,74)

### 3.) 運動の相対性

こうして『序説』で Euler は運動の相対性に到達する。

「物体は静止し続けようと、同一方向に同一の速さで前進し続けようと、まったく同じ状態にある。」 (§ 30)

「我々は世界において見かけの運動以外のいかなる〔運動の〕概念も作ることができないのであるから、この〔見かけの〕運動をここで論じるのはそれだけ一層重要である」 (§ 77)

「我々はある物体の真の運動をけっして見ることはできず、我々の知覚はつねにもっぱら物体の見かけの運動を告知するだけであるから、我々は見かけの運動を真のものと見なし、その運動を維持するには力を要するか否かを追究する。そして我々は、他の状況からその物体に力が働いているか否か、さらにそれが観測で見い出されたものとどの程度に一致しているかが示されたとき、そこから見かけの運動が真の運動とどの程度異なるのかを結論づけることができる。」 (§ 80)

### 4.) 非慣性系における「慣性力」の導入：

『序説』 (§ 73) では、Euler は運動方程式を『研究』や『発見』と同様に 3 次元直交成分にわけて

$$Mdu = nPdt, \quad Mdv = nQdt, \quad Mdw = nRdt \quad (6)$$

と記す ( $n$  は他の論文では  $1/2$  とした因子)。

観測者が動いているとき、その速度成分を  $(\alpha, \beta, \gamma)$  とし、観測者に固定した座標系で見た物体の速度は  $(u - \alpha, v - \beta, w - \gamma)$ 、したがって観測者の観測する力 (観測者に固定した座標系で観測する力) は

$$P' = \frac{M}{n} \frac{d}{dt}(u - \alpha) = P - \frac{M}{n} \dot{\alpha}, \quad Q' = \frac{M}{n} \frac{d}{dt}(v - \beta) = Q - \frac{M}{n} \dot{\beta}, \quad R' = \frac{M}{n} \frac{d}{dt}(w - \gamma) = R - \frac{M}{n} \dot{\gamma}.$$

それゆえ、 $\alpha, \beta, \gamma$  が一定なら、 $P' = P, Q' = Q, R' = R$ 。すなわち

「一直線上を等速で運動する観測者にとってのみ、物体の運動の維持のために必要とされる力の判断において、たとえ物体の見かけの運動からその力を導き出したとしても、誤ることはない。」 (§ 81)

「〔他方〕観測者の運動が等速直線運動ではないとき、……すべての物体の見かけの運動を実現させるためには、実際に作用している力のほかに、観測者の位置に生じる変化がもたらすいまひとつの力が逆向きの方に要求される。」 (§ 82) 非慣性座標系における「慣性力」の導入である。

## 7 『発見』の直接的成果：剛体の回転の Euler 方程式

### 1.) 『発見』以前

『船舶の科学 (Scientia Navalis)』1737-40(1749)LEOO, II-18.

剛体の内部でその構成要素を結び付けている力は重心の運動に影響せず、重心は全質量と全外力が集中した質点と同様の運動をすること (§ 122)、重心のまわりの回転は重心の運動と独立に捉えうる (§ 128)。

固定軸のまわりの回転にたいして、慣性モーメントをもちい ('momentum inertiae' の概念は Hyugens により、その用語は Euler の導入)、回転の加速度が力のモーメントに比例し慣性モーメントに反比例している

ことを示す (§ 140, § 160) .

ここで Euler は、力を慣性質量で割ったものが「加速力」であるという質点力学の原理 (上記 (1)(2) 式) とならんで、力のモーメントを慣性モーメントで割ったものが「回転力 (vis gyratoria)」であるという剛体力学の原理を初めて置いた.\*6

## 2.) 『発見』における剛体要素の運動方程式の導出

これらの先行的研究を踏まえて、『発見』では「力学の公理」としての質点の運動方程式から剛体の回転の方程式が導かれる。

(ただし Euler はすべて座標成分で記述しているため、そのままではあまりにも煩わしく式も長くなるので、ここでは現代的にベクトルとテンソルで記し、込み入った議論も端折る.)

剛体の重心が静止とし、重心を原点にとり、剛体の回転角速度をベクトル  $(\nu, \mu, \lambda)$  で表す。これは「角速度ベクトル」の初めて使用。Euler はこの角速度の各成分を各軸のまわりの時計まわりの回転 (左ネジ) にとり、剛体の要素 (微小部分) の位置を  $(x, y, z)$  として、その速度成分が次式で表されることを最初に導く：

$$u = y\lambda - z\mu, \quad v = z\nu - x\lambda, \quad w = x\mu - y\nu.$$

角速度ベクトルを現代的に右ネジにとると  $\vec{\omega} = -(\nu, \mu, \lambda)$  であり、位置が  $\vec{r} = (x, y, z)$  の微小部分の速度が  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  で与えられるということである。同様に加速度は  $\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ 。

したがって体積要素の運動方程式は、その微小部分の質量を  $dM$  として

$$d\vec{F} = dM \left\{ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right\}. \quad (7)$$

## 3.) 『発見』における剛体の回転の方程式の導出

この式を剛体全体で積分すると、重心を原点とっているから  $\int x dM = \int y dM = \int z dM = 0$  で、右辺は 0、したがって重心が静止している剛体に働く外力の和  $\vec{F} = \int d\vec{F}$  も 0 (Euler は剛体の構成要素間に働く力——内力——を全体で打消しあうとして、はじめから考えない)。

「[剛体を回転させる] これらの力の状態を正確に知るためには、それらの力の 3 つの座標軸にかんするモーメントをとる必要がある。」 (§ 46) すなわち

$$\vec{N} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \int dM \left\{ \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right\}. \quad (8)$$

ここで慣性テンソル  $\hat{I}$  の成分を

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int dM(y^2 + z^2), & I_{22} &= \int dM(z^2 + x^2), & I_{33} &= \int dM(x^2 + y^2), \\ I_{12} &= I_{21} = - \int dMxy, & I_{23} &= I_{32} = - \int dMyz, & I_{31} &= I_{13} = - \int dMzx, \end{aligned}$$

とし、剛体の一般的な回転の方程式を導き出す：

$$\vec{N} = \hat{I} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \hat{I} \vec{\omega}. \quad (9)$$

(「慣性テンソル」の導入は Euler. Euler の記法では  $I_{11}$  は  $Mff$ ,  $I_{12}$  は  $-Mll$  等、「慣性モーメント」は Euler の造語だが「慣性テンソル」は後世の用語.)

\*6 「最終的に運動の科学の基礎を形成する原理は、運動量に関するもの  $[m\dot{v} = F]$  と運動量のモーメントに関するもの  $[I\dot{\omega} = N]$  であり、それらは Euler に先立つ数十年間にさまざまに使用されてきたが、その一般性は Euler 以外の誰一人として理解していなかった。」 Maltese, *Conference Proceedings* (Bologna, 1993), Vol. 42.



『発見』で Euler が導いたのは、この式を空間に固定した直交座標系の成分で表したもの。その場合、回転にともない慣性テンソルの成分が変化するので、この式は実用的ではない。

#### 4.) 『発見』以後「Euler 角」と「(剛体の回転についての) Euler 方程式」の導出

『可動軸のまわりに回転する剛体の運動について (*Du mouvement d'un corps solide quelconque lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile*)』1751(1767)LEOO, II-8.

上記の方程式を剛体に固定した座標軸の成分で記述。可動軸と固定軸を関係づける所謂「Euler 角」を導入。

『物体の力学の研究 (*Recherches sur la connaissance mecanique des corps*)』1758(1765),LEOO, II-8.

慣性主軸の存在の証明。(この証明は Halle の J.A.Segner がすでに 1755 年にしていたようだ。)

『可動軸のまわりの固体の回転運動について (*Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable*)』1758(1765)LEOO, II-8.

剛体固定軸と主慣性モーメント (慣性主軸のまわりの慣性モーメント  $A, B, C$ ) をもちいた回転の方程式 (現在「Euler 方程式」と言われているもの) が記述される (§ 21):

$$N_x = A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3, \quad N_y = B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_3\omega_1, \quad N_z = C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2. \quad (10)$$

こうして『発見』で提唱されたプログラムは、その最初の成果として剛体の運動方程式 (Euler 方程式) に結実し、大著『固体ないし剛体の運動の理論 (*Teoria motus corporum solidorum seu rigidorum*)』(LEOO, II-3,4) の 1765 年の出版へとつながってゆく。

## 8 流体力学の形成

「流体の平衡状態の一般原理 (*Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides*)」,

「流体の運動の一般原理 (*Principes généraux du mouvement des fluides*)」,

「流体の運動の理論の研究の継続 (*Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides*)」  
すべて 1755(1757)LEOO, II-12; 以下順に『第 1 論文』『第 2 論文』『第 3 論文』。

### 1.) 第一の特徴 一般化

「ここに私は、流体静力学ないし流体の平衡の科学の全体を基礎づけるべき諸原理を提唱する。それらに可能な最大の広がりを与えるために、私は私の研究に、どこでも密度が均一で圧縮されない水やその他の液体だけではなく、その本性からであれ粒子がたがいに押し合う力の結果であれ、密度の変わりうる粒子よりなるような流体〔圧縮性流体〕をも含めるであろう。この後者のタイプには空気やその他の弾性的と呼ばれる物体もが分類されることは明らかである。さらには、私は重力を唯一の力とするケースだけではなく、流体の各粒子に働く任意の力にも拡張する所存である。」(『第 1 論文』 § 1)

### 2.) 第二の特徴 解析化

「前論文において流体の平衡の諸原理を十全に一般的に確立したので、……私はここに流体の運動を同一の基盤のうえに扱いたいと思う。……この問題はより困難であり、比較にならないほど深遠な研究を内にふくむことは簡単にわかることである。にもかかわらず私は、かりに困難が残るにしても、それらの困難は力学の側ではなく、もっぱら解析学の側にのみあるという程度にはやり遂げたいと願っている。というのも、これまでこの科学〔解析学〕は、流体の運動の諸原理をふくむ解析的な公式を展開するために必要な程度には完成されていないからである。」(『第 2 論文』 § 1)

本論文ではじめて「連続方程式」といわれる「(流体力学の) Euler の方程式」が導かれる。

### 3.) 座標系の導入と問題の設定 (『第 1 論文』 § 22, 『第 2 論文』 § 6-10, 『序説』 § 152, 155.)

議論は初めから3次元直交座標で行なわれる。すなわち、3つの直交する平面 OAB, OBC, OCA をとり、OA, OB, OC をそれぞれ  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸にとる。空間内の点 Z について、Z から面 OAB に降ろした垂線の足を点 Y, Y から面 OCA に下ろした垂線の足を点 X として、Z の位置をつぎの三つの量で表す：

$x = \overline{OX} = Z$  から OBC 面までの距離,

$y = \overline{XY} = Z$  から OCA 面までの距離,

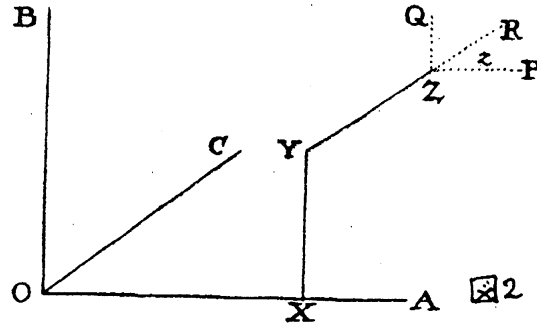
$z = \overline{YZ} = Z$  から OAB 面までの距離。

そして点 Z における時刻  $t$  の速度成分

$$u = u(t, x, y, z),$$

$$v = v(t, x, y, z),$$

$$w = w(t, x, y, z),$$



および圧力  $p = p(t, x, y, z)$  と密度  $q = q(t, x, y, z)$  の五つの量を決定する方程式が流体力学の原理であると考へ、それらにたいする方程式を導き出す。

基本的な方針は、流体要素として、点 Z を頂点、Z から OA ( $x$  軸) に平行に長さ  $dx$  の ZP, OB ( $y$  軸) に平行に長さ  $dy$  の ZQ, OC ( $z$  軸) に平行に長さ  $dz$  の ZR を作り、これらを 3 辺とする体積  $dV = dxdydz$  の微小な直方体 (図 3 の ZPQRrpqz) に着目し、流体の運動にともなうその変化を考える。

#### 4.) 連続方程式の導出 (『第2論文』 § 11-17, 『序説』 § 156)

微小時間  $dt$  後に点  $Z = (x, y, z)$  は点  $Z' = (x + udt, y + vdt, z + wdt)$  に移り、点 P は

$$P = \begin{pmatrix} x + dx \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow P' = \begin{pmatrix} x + dx + u(x + dx, y, z, t)dt \\ y + v(x + dx, y, z, t)dt \\ z + w(x + dx, y, z, t)dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + dx + udt + \partial_x u dx dt \\ y + vdt + \partial_x v dx dt \\ z + wdt + \partial_x w dx dt \end{pmatrix}$$

に移る (Q, R も同様)。したがって元の辺  $\overline{ZP}$ ,  $\overline{ZQ}$ ,  $\overline{ZR}$  はそれぞれ

$$\overline{Z'P'} = dx \begin{pmatrix} 1 + \partial_x u dt \\ \partial_x v dt \\ \partial_x w dt \end{pmatrix},$$

$$\overline{Z'Q'} = dy \begin{pmatrix} \partial_y u dt \\ 1 + \partial_y v dt \\ \partial_y w dt \end{pmatrix},$$

$$\overline{Z'R'} = dz \begin{pmatrix} \partial_z u dt \\ \partial_z v dt \\ 1 + \partial_z w dt \end{pmatrix}$$

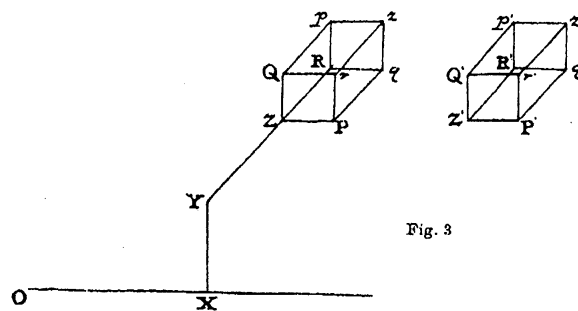


Fig. 3

に移り、もとの直方体はこれらを 3 辺とする平行 6 面体に移る。その体積は  $dt$  の 1 次までの近似で

$$dV' = dxdydz \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt\right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} dt\right) = dV \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt + \frac{\partial v}{\partial y} dt + \frac{\partial w}{\partial z} dt\right).$$

他方、密度  $q = q(t, x, y, z)$  は  $dt$  後に

$$q' = q(t + dt, x + udt, y + vdt, z + wdt) = q + \frac{\partial q}{\partial t} dt + \frac{\partial q}{\partial x} udt + \frac{\partial q}{\partial y} vdt + \frac{\partial q}{\partial z} wdt.$$

ところで、その間、体積要素の質量が保存するので  $q'dV' = qdV$ 、すなわち

$$\left(q + \frac{\partial q}{\partial t}dt + \frac{\partial q}{\partial x}udt + \frac{\partial q}{\partial y}vdt + \frac{\partial q}{\partial z}wdt\right)dV \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}dt + \frac{\partial v}{\partial y}dt + \frac{\partial w}{\partial z}dt\right) = qdV$$

したがって（以下、 $\vec{v} = (u, v, w)$  として括弧内に現代的なベクトル表記を与える）

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x}u + \frac{\partial q}{\partial y}v + \frac{\partial q}{\partial z}w + q\frac{\partial u}{\partial x} + q\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \text{i.e.} \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(qu)}{\partial x} + \frac{\partial(qv)}{\partial y} + \frac{\partial(qw)}{\partial z} &= 0, \quad \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q\vec{v}) = 0\right). \end{aligned} \quad (11)$$

### 5.) 流体要素の加速度の導出（『第2論文』 § 19, 『序説』 § 157）

この微小直方体の変化のさいの点  $Z$  の速度成分の変化は

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &\rightarrow u(t + dt, x + udt, y + vdt, z + wdt) = u + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w\right)dt, \\ v(t, x, y, z) &\rightarrow v(t + dt, x + udt, y + vdt, z + wdt) = v + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w\right)dt, \\ w(t, x, y, z) &\rightarrow w(t + dt, x + udt, y + vdt, z + wdt) = w + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w\right)dt, \\ \left(\vec{v}(t, \vec{r}) \rightarrow \vec{v}(t + dt, \vec{r} + \vec{v}dt) = \vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt}dt + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}dt\right) \end{aligned}$$

ゆえ、その加速度成分は

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w, \\ Y &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w, \\ Z &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w, \quad \left(\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\right). \end{aligned}$$

### 6.) 運動方程式（Euler の方程式）の導出（『第2論文』 § 20-24, 『序説』 § 153, 157, 158）

働く力は、外からの力が単位質量あたりで、 $x, y, z$  のそれぞれの方向に  $P, Q, R$ . そのほかに周りの流体からの圧力を受けている。その  $x$  成分は

$$p(t, x, y, z)dydz - p(t, x + dx, y, z)dxdydz = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz = -\frac{\partial p}{\partial x}dV. \quad (12)$$

（流体の任意の要素の表面には、等方的で面に垂直な圧力が加わることは『第1論文』 § 6.）

以上より、質量  $dM = qdV$  の微小直方体の運動方程式の  $x$  成分は

$$dMP - \frac{\partial p}{\partial x}dxdydz = dMX = dM\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w\right).$$

他の成分も同様にし、単位質量あたりになおして、流体要素にたいする次の運動方程式が得られる：

$$P - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w, \quad (13)$$

$$Q - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w, \quad (14)$$

$$R - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w, \quad \left(\vec{f} - \frac{\nabla p}{q} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\right). \quad (15)$$

これが、250年後の現在でさえこのままの形で使用されている Euler の方程式である.\*7

「これらの三つの方程式〔運動方程式の3成分〕に、流体の連続性の考察によって得られた最初のひとつ〔連続方程式〕、そしてさらに弾性 (l'élasticité [圧力])  $p$  と密度  $q$ 、および密度  $q$  に加わって弾性に影響を及ぼす他の量  $r$  のあいだの関係〔状態方程式〕を加えるならば、流体の運動の理論のすべてを含む五つの方程式を得たことになる。」(『第2論文』 § 21)

さらに Euler は、運動方程式 (13)(14)(15) の各成分にそれぞれ  $dx, dy, dz$  を掛けて足し合わせる。

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = dp$$

であるから、結果は次式 (『第3論文』 § 15 では「圧力  $p$  を決定する微分方程式」) に統合される：

$$\begin{aligned} Pdx + Qdy + Rdz - \frac{dp}{q} &= Xdx + Ydy + Zdz \\ &= +\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}udx + \frac{\partial u}{\partial y}vdx + \frac{\partial u}{\partial z}wdx \\ &\quad +\frac{\partial v}{\partial t}dy + \frac{\partial v}{\partial x}udy + \frac{\partial v}{\partial y}vdy + \frac{\partial v}{\partial z}wdy \\ &\quad +\frac{\partial w}{\partial t}dz + \frac{\partial w}{\partial x}udz + \frac{\partial w}{\partial y}vdz + \frac{\partial w}{\partial z}wdz. \end{aligned} \quad (16)$$

「流体の圧縮性の有無にかかわらず、またそれに作用する力がどのようなものであれ、この二つの方程式 [(11)(16)] のうちに、流体に見られるすべての可能な運動を見い出さう。」(『序説』 § 158)

それゆえ問題はこの積分を求めることに帰着する。しかしこのような複数個の変数の微分方程式 (偏微分方程式) の解についてはほとんど研究がなされていないので、「解析学の領域が相当拡大されるまでは、完全な解にたいする希望を持つことはできない。」(『第2論文』 § 25) すなわち

「流体の理論が内包するもののすべては、上記の二つの方程式 [(11)(16)] に含まれる。それゆえ研究をさらに進めるにあたって欠けているのは、力学の原理ではなく、この目的のためにはいまだ十分には開発されていない解析学のみである。」(『第2論文』 § 68)

7.) 流体のつりあいの条件 (『第1論文』 § 28-32, 『第3論文』 § 16, 『序説』 § 153,154)

流体のつりあいでは  $X = Y = Z = 0$  ゆえ、 $q(Pdx + Qdy + Rdz) = dp$ 。したがって  $q(Pdx + Qdy + Rdz)$  が積分可能でなければならず、次の条件が導かれる (『第1論文』 § 28)：

$$\frac{\partial(qP)}{\partial y} = \frac{\partial(qQ)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(qQ)}{\partial z} = \frac{\partial(qR)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(qR)}{\partial x} = \frac{\partial(qP)}{\partial z}. \quad (17)$$

「密度  $q$  が一定であるか  $p$  のみにより、 $dp/q$  が積分可能で  $\int dp/q$  が決まる場合…… $Pdx + Qdy + Rdz$  は積分可能でなければならない。……したがって力  $P, Q, R$  は、その積分量  $\int Pdx + Qdy + Rdz$  で表される力能 (Wirksamkeit) を定めうるものでなければならない。その場合にはすべての可能な位置で流体の圧力と密度は決定される。我々が知っているすべての現実的な力はそのような性質のものである。」(『序説』 § 154)

現代用語では、力が保存力で、仕事関数 (ポテンシャルの符号を変えたもの) を有するということである。

8.) (16) 式の積分可能性について (『第2論文』 § 26-27)

簡単のため、定常流で、速度が時刻  $t$  に陽に依存しないとする。

\*7 「Euler の真の功績は、流体力学の基礎の驚くほど現代的できわめて明晰な表現を与えたことにある。……〔流体力学についての〕 Euler の諸論文は、基本方程式が基本原理にとって代わった新しいスタイルの数理物理学の出現を刻印している。」 Darrigol, *Worlds of Flow*, p.25.

ここで Euler は、『序説』にもあるように、「現実の力」では  $Pdx + Qdy + Rdz$  が積分可能で

$$Pdx + Qdy + Rdz = dS, \quad (18)$$

と表しうると考える。

さらに Euler は『第2論文』では、 $udx + vdy + wdz$  が積分可能と仮定する。すなわち現代の用語では速度が渦なしで速度ポテンシャルを有し

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (19)$$

の関係があると仮定する。このとき (16) 式は

$$\begin{aligned} dS - \frac{dp}{q} &= u \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \\ &\quad + v \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) \\ &\quad + w \left( \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \\ &= udu + vdv + wdw = d \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \end{aligned} \quad (20)$$

となり、密度  $q$  が一定であれば積分が可能で、「きわめて美しい解 (fort belle solution)」が得られる。

しかしこの後に「たとえ流体が非圧縮性で一樣あっても、この  $[udx + vdy + wdz]$  が積分可能という」仮定が成り立たない場合があることに、私は気づいた。そのことは、私が今与えた解がきわめて特殊なものでしかないことを確信させるのに十分である」(『第2論文』 § 29) と続けている。

#### 9.) Bernoulli の定理 (『第3論文』 § 21-24, 『序説』 § 159)

この不十分性を流体要素の流れにそって見ることで克服したのが『第3論文』と『序説』。

流体要素の運動にそって見れば  $dx = udt, dy = vdt, dz = wdt$  ゆえ

$$udy = vdx, \quad vdz = wdy, \quad wdx = udz.$$

このときには、たとえ渦なしでなく、そのため (19) が成り立たなくとも、(16) から (20) が導かれる。したがって流体要素の運動にそって

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - S + \int \frac{dp}{q} = \text{Const.} \quad (21)$$

とくに流体が非圧縮性 ( $q$  が一定) で、かつ力が重力だけのとき、 $P = Q = 0, R = -g$ , したがって  $S = -gz$  であり、上式は

$$\frac{q}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + qgz + p = \text{Const.} \quad (22)$$

Euler 自身はここで Bernoulli の名前を出してはいないが、これはもちろん Bernoulli の定理である。

実際には Daniel Bernoulli はこの関係を、特殊な場合に、きわめてわかりにくい議論で導いたのであり、Bernoulli の書物にはこのような一般的な形のものが書かれているわけでもない。この定理を、運動方程式からストレートに導き出し、現在の教科書にあるような形に表現したのは Euler が最初である。<sup>\*8</sup>

<sup>\*8</sup> 「この〔第3〕論文の最大の成果は、“流線にたいする Bernoulli の方程式”とその重要性を明確に認めたことにある。」Truesdell, LEOO II-12 解説,

「Euler は Bernoulli の定理を完全な形で導いた最初の人である。」Routh, 1969 年の京都講演, 『土木学会誌』1970, Vol.55.

## 10.) 総括

「先行する私の二論文で私は流体のすべての理論を二つの解析的方程式に還元したので、これらの公式の考察はきわめて重要なように見える。というのもそれらは、きわめて異なるしかも大部分は説得力のない方法で発見されたすべてのものを含むばかりか、この科学において人がさらに期待しうるすべてのものをも含むからである。私たちが [D および J] Bernoulli, Clairaut, そして d'Alembert の諸氏に負っている流体研究がどれほど卓越したものであっても、それらは私の二つの一般公式からきわめて自然に導き出されるのであり、彼らの晦渋な考察が、私が私の二つの方程式を導き出したさいのもとになった、そして力学の第一公理によって直截に導かれた諸原理の単純さと一致することを感嘆せずにはおれないであろう。」(『第3論文』 § 1)

「この問題を扱った他の人たちは、d'Alembert をのぞくならば、流体にたいしてたかだか2次元の広がりを与えたか、すくなくともそれぞれの粒子の運動が一平面でなされると仮定したので、彼らは見出した公式をもっぱら特殊なものとししか見なし得なかった。それにたいして私が与えたものは、完全に一般的で、どれほど複雑なものであれそれに含まれないものを想像することは不可能である。」(『第3論文』 § 18)

## 9 結論

Newton が「物体の運動の法則」として措いたものを、質点にたいする「運動方程式」として3次元デカルト座標成分をもちいた2階の微分方程式——今日「Newton の運動方程式」と呼ばれているもの——に表したのは、Euler である。端的に言って、現在、古典力学の教科書に「Newton 力学」として記述されているものを始めて描き出したのは Euler であった。「Euler は力学の大部分を現代的な形にした。我々がそのテーマで学んだもののすべては、間接的にせよ、Euler の著書と論文からである。」(Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*.)

こうして「極限の幾何学」としてあった「Newton の力学」が解析学にもとづく「Newton 力学」に変貌をとげ、天文学の主要な武器が幾何学から解析学に変わり、観測される物体の運動からその物体に働く力を求める「順問題」から、与えられた力のもとで物体のする運動を求める「逆問題」へと力学の重心は転換された。

のみならず Euler は「質点の運動方程式」を質点の集合としての諸種の物体の力学にたいする「第一原理」——「その上に運動の全理論が樹立されるべき公理 (le axiome sur lesquels toute la doctrine de mouvement est établie)」——にとり、剛体力学、弾性体力学、流体力学の一般理論の形成を目指した。剛体の力学や流体の力学の個別の問題をとりあげ、問題ごとに個別の原理を措き、個別の方法を用いてその解決に挑んだ研究者はそれまでもいた。しかし、剛体の力学や流体力学の一般理論の形成を目的とし、汎用的な基礎方程式を提唱したのも、それを質点力学の基礎から体系的に導き出したのも、Euler をもって嚆矢とする。

そして驚くべきことに、剛体力学と流体力学で Euler が導いた基礎方程式、およびその導出に用いた方法は、250年後の現代においても有効に使用されている。科学史家 Dugas の言うように「この [Euler の流体力学の] 論文はきわめて完全なので、たったの一行も古くなっていない」(*Histoire de la Mécanique*) のである。

こうして、1687年における『プリンキピア』出版以来半世紀あまり、個別の問題毎に個別の原理を採用し個別の方法で扱われていた力学の諸問題が、Euler の働きにより、統一的で体系的な力学のなかに位置づけられることになり、かくしてその後、力学は同時期の解析学の発展と手を携えて戦線を拡大し、内的にも整備されてゆくことになる。

なお、ここでは触れなかったが、Euler はまた、変分法の基礎方程式 (Euler-Lagrange 方程式) を最初に導き、さらには最小作用の原理を語ることで、変分原理による力学の端緒を与え、Lagrange 以降の解析力学への途を拓いた。この点について詳しくは拙著『古典力学の形成』(日本評論者)を参照していただきたい。